

CORRECTION EXERCICES ECOULEMENT DES FLUIDES

Exercice 1 :

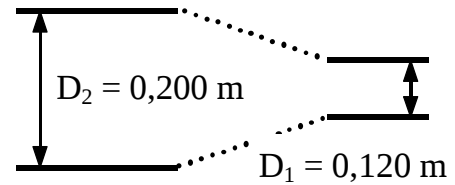
$$q_v = 3000 \text{ L/min} = \frac{3000 \cdot 10^{-3}}{60} \text{ m}^3 \cdot \text{s}^{-1}$$

Comme le liquide est incompressible, le débit est CONSTANT.

$$q_v = s \cdot v = \frac{\pi D^2}{4} \cdot v \Rightarrow v = \frac{4 \cdot q_v}{\pi D^2}$$

$$v_1 = \frac{4 \cdot q_v}{\pi D_1^2} = 4,42 \text{ m.s}^{-1}$$

$$v_2 = \frac{4 \cdot q_v}{\pi D_2^2} = 1,59 \text{ m.s}^{-1}$$



Exercice 2 : 1.) BERNOULLI : $p + \rho \cdot g \cdot z + \frac{1}{2} \cdot \rho \cdot v^2 = \text{cte}$

$$p_1 + \rho \cdot g \cdot z_1 + \frac{1}{2} \rho \cdot v_1^2 = p_2 + \rho \cdot g \cdot z_2 + \frac{1}{2} \rho \cdot v_2^2$$

En simplifiant par les termes liés la vitesse, on

obtient : $p_2 - p_1 = \rho \cdot g \cdot z_1 - \rho \cdot g \cdot z_2 \Rightarrow p_2 - p_1 = -\rho \cdot g \cdot (z_2 - z_1)$

Donc $\Delta p = -\rho \cdot g \cdot \Delta z$.

On retrouve la formule de l'hydrostatique avec axe orienté vers le haut.

2.) Application numérique :

$$\Delta p_{\text{eau}} = -\rho_{\text{eau}} \cdot g \cdot \Delta z \Rightarrow \Delta p_{\text{eau}} = -0,5 \cdot 10^5 \text{ Pa}$$

$$\Delta p_{\text{air}} = -\rho_{\text{air}} \cdot g \cdot \Delta z \Rightarrow \Delta p_{\text{air}} = -65 \text{ Pa}$$

3.) Variation relative comparée à la pression atmosphérique normale.

$$\frac{\Delta p_{\text{eau}}}{p_{\text{atm}}} = -\frac{50\,000}{1 \cdot 10^5} \Rightarrow \frac{\Delta p_{\text{eau}}}{p_{\text{atm}}} = -50\%$$

$$\frac{\Delta p_{\text{air}}}{p_{\text{atm}}} = -\frac{65}{1 \cdot 10^5} \Rightarrow \frac{\Delta p_{\text{air}}}{p_{\text{atm}}} = -0,065\%$$

Conclusion : pour les écoulements d'air (gainés de ventilation par exemple), il est inutile de tenir compte du terme « altitude » $\rho \cdot g \cdot z$

Exercice 3 :

1.) $Q_v = S \cdot v$ avec $S = \frac{\pi D^2}{4} \Rightarrow Q_v = \frac{\pi D^2}{4} \cdot v \Rightarrow Q_v = 0,113 \text{ m}^3 \cdot \text{s}^{-1}$

Ecoulement isovolume :

$$Q_v = \frac{\Delta V}{\Delta t} \quad \text{à } 60^\circ\text{C}$$

$$Q_{v0} = \frac{\Delta V_0}{\Delta t} \quad \text{à } 0^\circ\text{C}$$

En raisonnant sur l'équation des gaz parfaits $P \cdot V = n \cdot R \cdot T$, on peut écrire :

Situation écoulement

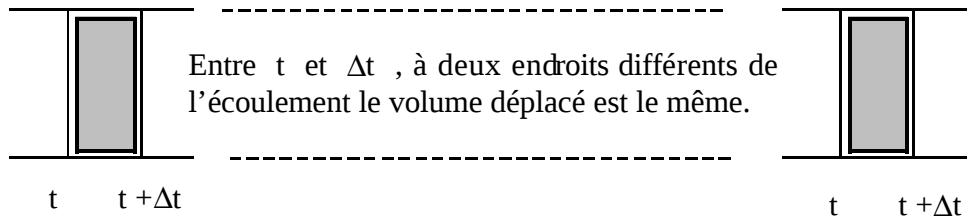
$$P_e = 1 \cdot 10^5 \text{ Pa}$$

$$\Delta V_e = 0,113 \text{ m}^3$$

$$n_e = ?$$

$$T_e = 60 + 273 = 333 \text{ K}$$

Entre t et $t + \Delta t$, à deux endroits différents de l'écoulement le volume déplacé est le même.



Situation C.N.T.P.

$$P_0 = 1 \cdot 10^5 \text{ Pa}$$

$$\Delta V_0 = \text{à calculer}$$

$$n_e = n_0$$

$$T_1 = 0 + 273 = 273 \text{ K}$$

$$P \cdot \Delta V = n R T \quad \text{Comme } P, n \text{ et } R \text{ sont constants} \Rightarrow \frac{\Delta V}{T} = \text{constante}$$

$$\frac{\Delta V_e}{T_e} = \frac{\Delta V_o}{T_o} \Rightarrow \Delta V_o = T_o \frac{\Delta V_e}{T_e} \Rightarrow \Delta V_o = 93 \cdot 10^{-3} \text{ m}^3 \cdot \text{s}^{-1}$$

2.) Comme on donne la masse volumique de l'air pour 0°C, on prendra le débit volumique Q_{vo} pour calculer le débit massique : $Q_m = \rho_a \cdot Q_{vo} \Rightarrow Q_m = 0,121 \text{ kg} \cdot \text{s}^{-1}$

Exercice 4 : 1.) $q_v = 16,3 \text{ m}^3/\text{h} = \frac{16,3}{3600} \text{ m}^3 \cdot \text{s}^{-1} \Rightarrow q_v = 4,53 \cdot 10^{-3} \text{ m}^3 \cdot \text{s}^{-1}$

Comme le liquide est incompressible, le débit est CONSTANT.

$$q_v = s \cdot v = \frac{\pi D^2}{4} \cdot v \Rightarrow v = \frac{4 \cdot q_v}{\pi D^2}$$

$$v_1 = \frac{4 \cdot q_v}{\pi D_1^2} = 0,4 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$$

$$v_2 = \frac{4 \cdot q_v}{\pi D_2^2} = 14,4 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$$

2.) **BERNOULLI :** $p + \rho \cdot g \cdot z + \frac{1}{2} \cdot \rho \cdot v^2 = \text{cte}$

Situation A : les deux conduites sont dans le même plan horizontal :

Conduite principale :

$$p_1 = 4 \cdot 10^5 \text{ Pa}$$

$$z_1 = z_2$$

$$v_1 = 0,4 \text{ m/s}$$

conduite secondaire :

$$p_2 = \text{à calculer}$$

$$z_2 = z_1$$

$$v_2 = 14,4 \text{ m/s}$$

$$p_1 + \cancel{\rho \cdot g \cdot z_1} + \frac{1}{2} \rho \cdot v_1^2 = p_2 + \cancel{\rho \cdot g \cdot z_2} + \frac{1}{2} \rho \cdot v_2^2 \quad \text{En simplifiant par les termes liés l'altitude}$$

(même altitude : $z_1 = z_2$), on obtient : $p_2 = p_1 + \frac{1}{2} \rho \cdot v_1^2 - \frac{1}{2} \rho \cdot v_2^2$

Donc $p_2 = p_1 + \frac{1}{2} \rho \cdot (v_1^2 - v_2^2)$ mais v_1^2 est négligeable devant v_2^2

Soit : $p_2 = p_1 - \frac{1}{2} \rho \cdot v_2^2 \Rightarrow p_2 = 3 \cdot 10^5 \text{ Pa}$

Situation B : la conduite secondaire est située 12 m plus haut que la conduite principale..

On prend l'origine des altitudes à l'endroit le plus bas du problème

Conduite principale :

$$p_1 = 4 \cdot 10^5 \text{ Pa}$$

$$z_1 = 0$$

$$v_1 = 0,4 \text{ m/s}$$

conduite secondaire :

$$p_2 = \text{à calculer}$$

$$z_2 = 12 \text{ m}$$

$$v_2 = 14,4 \text{ m/s}$$

$$p_1 + \cancel{\rho \cdot g \cdot z_1} + \frac{1}{2} \rho \cdot v_1^2 = p_2 + \rho \cdot g \cdot z_2 + \frac{1}{2} \rho \cdot v_2^2$$

Ce qui donne : $p_2 = p_1 - \rho \cdot g \cdot z_2 + \frac{1}{2} \rho \cdot (v_1^2 - v_2^2)$ mais v_1^2 est négligeable devant v_2^2

Donc : $p_2 = p_1 - \rho \cdot g \cdot z_2 - \frac{1}{2} \rho \cdot v_2^2 \Rightarrow p_2 = 1,8 \cdot 10^5 \text{ Pa}$

Exercice 5 : 1.)

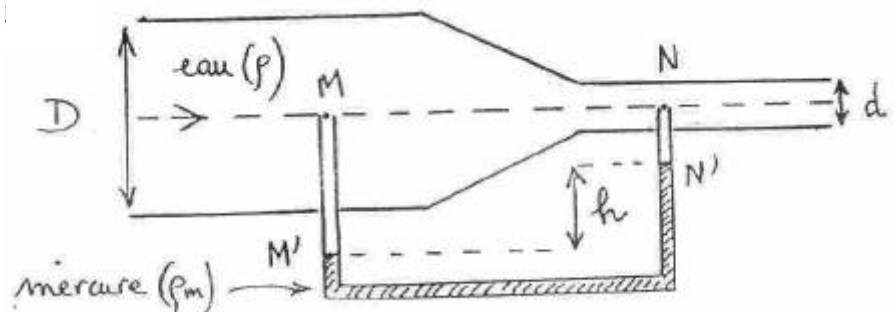
La hauteur MM' sera appelée h_e

La hauteur NN' sera appelée h

L'eau étant incompressible, le débit de l'écoulement est constant.

$$Q_v = S_M \cdot v_M = S_N \cdot v_N$$

$$S_M = \frac{\pi D^2}{4} \quad \text{et} \quad S_N = \frac{\pi d^2}{4}$$



$$\frac{\pi D^2}{4} \cdot v_M = \frac{\pi d^2}{4} \cdot v_N \quad \Rightarrow \quad v_N = v_M \cdot \frac{\pi D^2}{4} \cdot \frac{4}{\pi d^2} \quad \Rightarrow \quad v_N = v_M \cdot \left(\frac{D}{d}\right)^2$$

2.) BERNOULLI : $p + \rho \cdot g \cdot z + \frac{1}{2} \cdot \rho \cdot v^2 = \text{cte}$

$p_M + \cancel{\rho \cdot g \cdot z_M} + \frac{1}{2} \rho \cdot v_M^2 = p_N + \cancel{\rho \cdot g \cdot z_N} + \frac{1}{2} \cdot \rho \cdot v_N^2$: les deux sections sont dans le même plan horizontal.

Donc : $p_N - p_M = -\frac{1}{2} \rho \cdot (v_N^2 - v_M^2)$

STATIQUE : $p_N = p_{N'} - \rho \cdot g \cdot NN'$

$p_M = p_{M'} - \rho \cdot g \cdot MM'$

Donc en retranchant les 2 égalités membre à membre, on obtient :

$$p_N - p_M = p_{N'} - p_{M'} - \rho \cdot g \cdot (NN' - MM') = p_{N'} - p_{M'} + \rho \cdot g \cdot (MM' - NN')$$

$$p_N - p_M = p_{N'} - p_{M'} + \rho \cdot g \cdot h$$

D'autre part : dans le mercure on peut écrire : $p_{N'} - p_{M'} = -\rho_m \cdot g \cdot h$

Finalement : $p_N - p_M = -\rho_m \cdot g \cdot h + \rho \cdot g \cdot h \quad \Rightarrow \quad p_N - p_M = (\rho - \rho_m) \cdot g \cdot h$

3.) $p_N - p_M (\text{statique}) = p_N - p_M (\text{dynamique})$

$$(\rho - \rho_m) \cdot g \cdot h = -\frac{1}{2} \rho \cdot (v_N^2 - v_M^2) \quad \text{Puis on remplace } v_N \text{ par la relation trouvée en 1.)}$$

$$-(\rho - \rho_m) \cdot g \cdot h = +\frac{1}{2} \rho \cdot \left[v_M^2 \cdot \left(\frac{D}{d}\right)^4 - v_M^2 \right]$$

Donc
$$v_M = \sqrt{\frac{-2 \cdot (\rho - \rho_m) \cdot g \cdot h}{\rho \cdot \left[\left(\frac{D}{d}\right)^4 - 1\right]}}$$