CORRIGE EXERCICES SUR GRANDEURS PHYSIQUES / UNITES

Ex 1 : $W = F \, . \, \Delta x$ avec $F = m\gamma = m\ddot{x} \Rightarrow [F] = M \, . \, L \, . \, T^{-2}$

Donc $[W] = M \, . \, L \, . \, T^{-2} \, . \, L \Rightarrow$ $[W] = M \, . \, L^2 \, . \, T^{-2}$

Ex 2 : $p_2 - p_1 = \rho \, . \, g \, . \, (z_2 - z_1)$

* Premier membre : pression $p = \dfrac{F}{S}$

donc $[1^{er} \text{ membre}] = \dfrac{M \, . \, L \, . \, T^{-2}}{L^2} \Rightarrow$ $[1^{er} \text{ membre}] = M \, . \, L^{-1} \, . \, T^{-2}$

* Deuxième membre : ρ (masse volumique) $= \dfrac{m}{V}$ **g** : accélération **z** : altitude

donc $[2^{ième} \text{ membre}] = \dfrac{M}{L^3} \, . \, L.T^{-2} \, . \, L \Rightarrow$ $[2^{ième} \text{ membre}] = M \, . \, L^{-1} \, . \, T^{-2}$

CONCLUSION : LES DEUX MEMBRES ONT LA MEME DIMENSION : LA FORMULE EST COHERENTE

Ex 3 : D'après l'exercice 1 : $[W] = M \, . \, L^2 \, . \, T^{-2}$

W en 1 cg . 1 mm^2 . 1µs^{-2} $= 10^{-5} \, . \, (10^{-3})^2 \, . \, (10^{-6})^{-2} = 10^{-11} \, . \, 10^{12} = 10$ J

Donc 1 cg . mm^2 . µs^{-2} = 10 J

Ex 4 : $f = K.l^{\alpha}.F^{\beta}.\mu^{\gamma}$

$[1^{er} \text{ membre}] = T^{-1}$ (fréquence : $f = \dfrac{1}{T}$)

$[2^{ième} \text{ membre}] = L^{\alpha} \, . \, (M \, . \, L \, . \, T^{-2})^{\beta} \, . \, (\dfrac{M}{L})^{\gamma} = M^{(\beta+\gamma)} \, . \, L^{(\alpha+\beta-\gamma)} \, . \, T^{-2\beta}$

Dans une formule correcte et homogène, les deux membres ont même dimension :

On en déduit : $\begin{Bmatrix} \alpha + \beta - \gamma = 0 \\ \beta + \gamma = 0 \\ -2\beta = -1 \end{Bmatrix} \Rightarrow \beta = \dfrac{1}{2} \Rightarrow \gamma = -\dfrac{1}{2}$

et $\alpha = \gamma - \beta = -\dfrac{1}{2} - \dfrac{1}{2} = -1$

Donc la formule devient $f = K \, . \, l^{-1} \, . \, F^{1/2} \, . \, \mu^{-1/2}$ Þ $\mathbf{f = \dfrac{K}{l} \, . \sqrt{\dfrac{F}{\mu}}}$

Ex 5 : $p = \dfrac{1}{3} \, n \, . \, m \, . \, u^2$

$[1^{er} \text{ membre}] = M \, . \, L^{-1} \, . \, T^{-2}$

$[2^{ième} \text{ membre}] = \dfrac{1}{L^3} \, . \, M \, . \, (L.T^{-1})^2 = M \, . \, L^{-1} \, . \, T^{-2}$

CONCLUSION : LES DEUX MEMBRES ONT LA MEME DIMENSION : LA FORMULE EST COHERENTE

Ex 6 : $v = k \cdot m^{\alpha} \cdot h^{\beta} \cdot g^{\gamma}$

$[1^{er} \text{ membre}] = L \cdot T^{-1}$

$[2^{ième} \text{ membre}] = M^{\alpha} \cdot L^{\beta} \cdot (L \cdot T^{-2})^{\gamma} = M^{\alpha} \cdot L^{\beta+\gamma} \cdot T^{-2\gamma}$

Par comparaison de la dimension des deux membres, on obtient :

$$\left\{ \begin{array}{c} \alpha = 0 \\ \beta + \gamma = 1 \\ -2\gamma = -1 \end{array} \right\} \Rightarrow \quad \alpha = 0 \qquad \gamma = \frac{1}{2} \qquad \beta = \frac{1}{2}$$

Et la formule devient : $v = k \cdot h^{1/2} \cdot g^{1/2} \Rightarrow v = k\sqrt{g\,h}$

Ex 7 : ΔX : dérivée simple $\qquad \frac{\Delta X}{X}$: dérivée logarithmique

a. $X = A^2 \Rightarrow \ln X = 2 \ln A \Rightarrow \frac{dX}{X} = 2\frac{dA}{A} \Rightarrow \frac{\Delta X}{X} = 2\frac{\Delta A}{A}$

b. $X = A^{1/3} \Rightarrow \ln X = \frac{1}{3} \ln A \Rightarrow \frac{\Delta X}{X} = \frac{1}{3}\frac{\Delta A}{A}$

c. $X = \frac{(A-B)\cdot(C-D)}{(E-F)} \Rightarrow \ln X = \ln(A-B) + \ln(C-D) - \ln(E-F)$

$\frac{\Delta X}{X} = \frac{\Delta(A-B)}{(A-B)} + \frac{\Delta(C-D)}{(C-D)} + \frac{\Delta(E-F)}{(E-F)}$ **Les erreurs s'ajoutent au pire des cas**

$\frac{\Delta X}{X} = \frac{\Delta A + \Delta B}{(A-B)} + \frac{\Delta C + \Delta D}{(C-D)} + \frac{\Delta E + \Delta F}{(E-F)} = \ldots\ \%$

d. $X = \frac{A.B - C.D}{(E-F)} \Rightarrow \ln X = \ln(A.B - C.D) - \ln(E-F)$

$\frac{\Delta X}{X} = \frac{\Delta(AB-CD)}{(AB-CD)} + \frac{\Delta(E-F)}{(E-F)}$

$\Delta(AB - CD) = ?$ principe de la dérivée simple :

$= \Delta(AB) + \Delta(CD) = A\,\Delta B + B\,\Delta A + C\,\Delta D + D\,\Delta C$

Ce qui donne : $\frac{\Delta X}{X} = \frac{A\,\Delta B + B\,\Delta A + C\,\Delta D + D\,\Delta C}{AB - CD} + \frac{\Delta E + \Delta F}{(E-F)}$

Ex 8 : Chiffres significatifs :

a. $v = \sqrt{2 \cdot 9{,}81 \cdot 3{,}00} \Rightarrow v = 7{,}67202\ldots \Rightarrow v = 7{,}67\ m.s^{-1}$

b. $v = \sqrt{2 \cdot 9{,}8 \cdot 3{,}0} \Rightarrow v = 7{,}66811\ldots \Rightarrow v = 7{,}7\ m.s^{-1}$

Ex 9 : $f = \frac{1}{2L}\sqrt{\frac{F}{\mu}} \Rightarrow f^2 = \frac{1}{(2L)^2}\cdot\frac{F}{\mu} \Rightarrow \mu = \frac{F}{4L^2 f^2}$

Le résultat sera donné avec 2 chiffres significatifs

$\mu = \frac{85}{4 \cdot (0{,}52)^2 \cdot (440)^2} \Rightarrow \mu = 4{,}0592.. \times 10^{-4} \Rightarrow \mu = 4{,}1 \cdot 10^{-4}\ kg.m^{-1}$