

CORRECTION DES EXERCICES SUR OSCILLATEURS MECANIQUES

EXERCICE 1 :

1. Equilibre

* système : masse

* Bilan : Poids $\vec{P}$: $P = m g$;

Tension du ressort $\vec{T}_1$: $T_1 = k \Delta l$

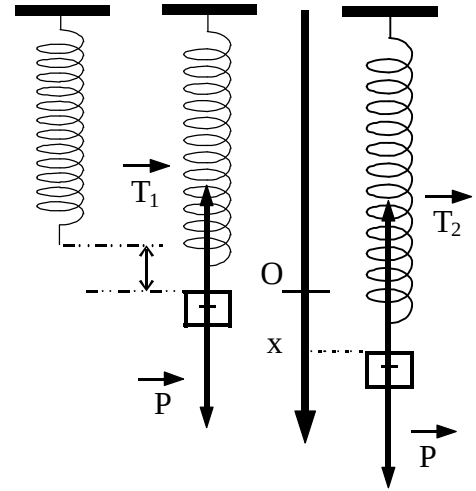
* Equilibre : $\Sigma \vec{F} = \vec{0}$

donc $\vec{P} + \vec{T}_1 = \vec{0}$

* Projection sur $X'X$:

$$m g - k \Delta l = 0 \quad \text{donc} \quad \Delta l = \frac{m g}{k}$$

ce qui donne $\Delta l = 2,5 \cdot 10^{-2} \text{ m}$



2. Mouvement :

2.1. Nature du mouvement :

* système : masse

* Bilan : Poids $\vec{P}$: $P = m g$;

Tension du ressort $\vec{T}_2$: $T_2 = (k \Delta l + x)$

* P F D : $\Sigma \vec{F} = m \vec{\gamma}$ donc $\vec{P} + \vec{T}_2 = m \vec{\gamma}$

* Projection sur $X'X$:

$$m g - k (\Delta l + x) = m \ddot{x} \quad \text{ce qui donne} \quad m g - k \Delta l - k x = m \ddot{x}$$

$$\Rightarrow -k x = m \ddot{x} \quad \text{Donc} \quad \ddot{x} + \frac{k}{m} x = 0 : \text{c'est une équation du type} \quad \ddot{x} + \omega_0^2 x = 0.$$

La solution est une fonction sinusoïdale du temps : $x = a \cos(\omega_0 t + \varphi)$

Période : $T = \frac{2\pi}{\omega}$ avec $\omega^2 = \frac{k}{m} \Rightarrow \omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$

Donc $T = 2\pi \sqrt{\frac{m}{k}} \quad \underline{T = 0,314 \text{ s}}$

2.2. Equation horaire : $x = a \cos(\omega t + \varphi)$

* a : amplitude $a = 2 \text{ cm} = 2 \cdot 10^{-2} \text{ m}$

* $\omega = \sqrt{\frac{k}{m}} = \sqrt{\frac{40}{0,1}} = 20 \text{ rad.s}^{-1}$

* $\varphi = ?$ Ce sont les conditions initiales (au départ) qui vont fixer la valeur de φ .

$t = 0 \Rightarrow x = a \cos \varphi$

$\Rightarrow x = +a \quad \text{donc} \quad \cos \varphi = +1 \Rightarrow \varphi = 0$

L'équation horaire devient alors : $x = 2 \cdot 10^{-2} \cos 20 t$

2.3. La vitesse, c'est la dérivée de la position : $v = \frac{dx}{dt}$

$$\Rightarrow v = -2 \cdot 10^{-2} \cdot 20 \sin 20 t \Rightarrow v = -0,4 \sin 20 t$$

Comme la valeur maximale du sinus est +1 ou -1 $\Rightarrow v_{\max} = \pm 0,4 \text{ m.s}^{-1}$

2.4. Au passage par l'équilibre, $x = 0$ et $v = v_{\max}$

En effet $x = 2 \cdot 10^{-2} \cos 20 t$ et $x v = -0,4 \sin 20 t$ sont deux fonctions sinusoïdales en quadrature. Donc quand l'une est au maximum ou au minimum, l'autre passe par zéro.

$$E_c = \frac{1}{2} m v_{\max}^2 \Rightarrow E_c = \frac{1}{2} 0,1 (0,4)^2 \Rightarrow E_c = 8 \cdot 10^{-3} \text{ J}$$

EXERCICE 2 :

1. Equilibre

* système : masse

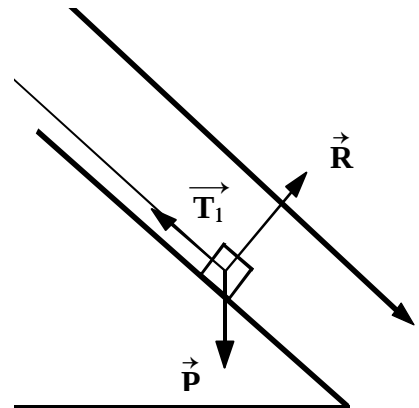
* Bilan : Poids $\vec{P}$: $P = m g$;

Réaction $\vec{R}$ du plan ;

Tension du ressort $\vec{T}_1$: $T_1 = k \Delta l$

* Equilibre : $\Sigma \vec{F} = \vec{0}$

$$\text{donc } \vec{P} + \vec{R} + \vec{T}_1 = \vec{0}$$



* Projection sur X'X :

$$m g \sin \alpha - k \Delta l = 0 \quad \text{donc} \quad \sin \alpha = \frac{k \Delta l}{m g}$$

$$\text{ce qui donne} \quad \sin \alpha = 0,5 \Rightarrow \alpha = 30^\circ$$

2. Mouvement :

2.1. Equation différentielle :

* système : masse

* Bilan : Poids $\vec{P}$: $P = m g$;

Réaction $\vec{R}$ du plan ;

Tension du ressort $\vec{T}_2$: $T_2 = (k \Delta l + x)$

* P F D : $\Sigma \vec{F} = m \vec{\gamma}$ donc $\vec{P} + \vec{R} + \vec{T}_2 = m \vec{\gamma}$

* Projection sur X'X :

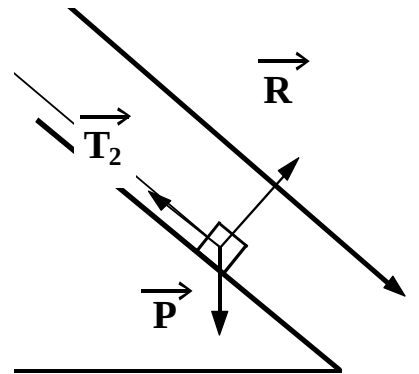
$$m g - k (\Delta l + x) = m \ddot{x} \quad \text{ce qui donne} \quad m g - k \Delta l - k x = m \ddot{x}$$

$$\Rightarrow -k x = m \ddot{x}$$

$$\Rightarrow \text{Donc l'équation différentielle s'écrit : } \ddot{x} + \frac{k}{m} x = 0 :$$

c'est une équation du type $\ddot{x} + \omega^2 x = 0$.

La solution est une fonction sinusoïdale du temps : $x = a \cos (\omega t + \varphi)$



Période : $T = \frac{2\pi}{\omega}$ avec $\omega^2 = \frac{k}{m} \Rightarrow \omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$

Donc $T = 2\pi \sqrt{\frac{m}{k}} \quad \underline{T = 0,628 \text{ s}}$

2.2. Equation horaire : $x = a \cos(\omega t + \varphi)$

* a : amplitude $a = 3 \text{ cm} = 3 \cdot 10^{-2} \text{ m}$

* $\omega = \sqrt{\frac{k}{m}} = \sqrt{\frac{24}{0,24}} = 10 \text{ rad.s}^{-1}$

* $\varphi = ?$ Ce sont les conditions initiales (au départ) qui vont fixer la valeur de φ .

$t = 0 \Rightarrow x = a \cos \varphi$

$\Rightarrow x = +a$ donc $\cos \varphi = +1 \Rightarrow \varphi = 0$

L'équation horaire devient alors : $x = 3 \cdot 10^{-2} \cos 10 t$

La vitesse, c'est la dérivée de la position : $v = \frac{dx}{dt}$

$\Rightarrow v = -3 \cdot 10^{-2} \cdot 10 \sin 10 t \Rightarrow v = -0,3 \sin 10 t$

Comme la valeur maximale du sinus est +1 ou -1 $\Rightarrow v_{\max} = \pm 0,3 \text{ m.s}^{-1}$

EXERCICE 3 :

1. Equilibre

* système : corps de masse m_0

* Bilan : Poids $\vec{P}$: $P = m_0 g$;

Tension du ressort $\vec{T}_1$: $T_1 = k \Delta l$

* Equilibre : $\Sigma \vec{F} = \vec{0}$

donc $\vec{P} + \vec{T}_1 = \vec{0}$

* Projection sur X'X :

$-m_0 g + k \Delta l = 0$ donc $k = \frac{m_0 g}{\Delta l}$

ce qui donne $k = 40 \cdot \text{N.m}^{-1}$

2. Mouvement : dans la question 2 la masse accrochée n'est plus la même : c'est m , valeur à calculer

2.1. Equation différentielle du mouvement :

* système : masse m

* Bilan : Poids $\vec{P}$: $P = m g$;

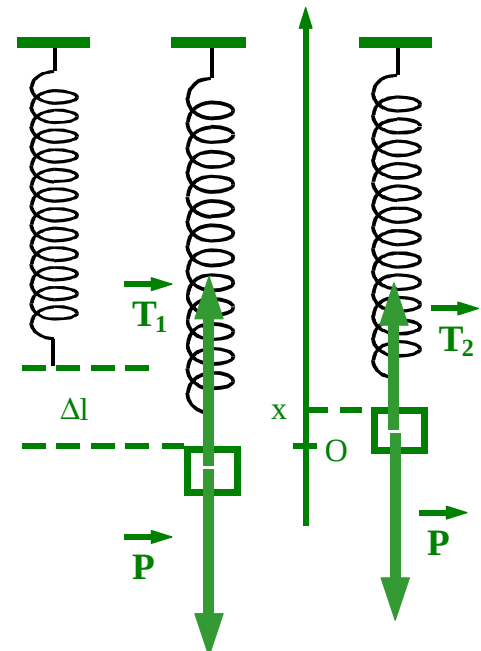
Tension du ressort $\vec{T}_2$: $T_2 = (k \Delta l - x)$

* P F D : $\Sigma \vec{F} = m \vec{\gamma}$ donc $\vec{P} + \vec{T}_2 = m \vec{\gamma}$

* Projection sur X'X :

$-m g + k(\Delta l - x) = m \ddot{x}$ ce qui donne

REPOS EQUILIBRE MOUVEMENT



$-m g + k \Delta l - k x = m \ddot{x}$

$$\Rightarrow -kx = m \ddot{x} \quad \text{Donc} \quad \ddot{x} + \frac{k}{m}x = 0 : \text{c'est une équation du type} \quad \ddot{x} + \omega_0^2 x = 0.$$

La solution est une fonction sinusoïdale du temps : $x = a_0 \cos(\omega_0 t + \varphi)$

2.2. Pulsation propre : Période : $T_0 = \frac{2\pi}{\omega_0}$

$$\Rightarrow \omega_0 = \frac{2\pi}{T_0} = \frac{6,28}{0,77} \Rightarrow \omega_0 = 8,16 \text{ rad.s}^{-1}$$

$$\Rightarrow \text{masse } m : \omega_0^2 = \frac{k}{m} \quad \text{donc} \quad m = \frac{k}{\omega_0^2} \Rightarrow m = 0,600 \text{ kg} = 600 \text{ g}$$

2.3. Equation horaire : $x = a_0 \cos(\omega_0 t + \varphi)$

* a_0 : amplitude $a = 4 \text{ cm} = 4 \cdot 10^{-2} \text{ m}$

* $\omega_0 = 8,16 \text{ rad.s}^{-1}$

* $\varphi = ?$ Ce sont les conditions initiales (au départ) qui vont fixer la valeur de φ .

$$t = 0 \Rightarrow x = a_0 \cos \varphi$$

$$\Rightarrow x = +a_0 \quad \text{donc} \quad \cos \varphi = +1 \Rightarrow \varphi = 0$$

L'équation horaire devient alors : $x = 4 \cdot 10^{-2} \cos 8,16 t$

3. MOUVEMENT AMORTI PAR FROTTEMENT VISQUEUX

3.1. Equation différentielle du mouvement : c'est la même étude qu'au paragraphe 2.) Il faut simplement rajouter au bilan des forces la force de frottement $\vec{F} = -b \cdot \vec{v}$

Ce qui donne pour la projection sur X'X : $-kx - b\dot{x} = m\ddot{x}$

En divisant par $m \Rightarrow \ddot{x} + \frac{b}{m}\dot{x} + \frac{k}{m}x = 0$

Ce qui est une équation du type : $\ddot{x} + 2\lambda\dot{x} + \omega_0^2 x = 0$

Avec $2\lambda = \frac{b}{m}$ et $\omega_0^2 = \frac{k}{m} \Rightarrow \omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$

3.2. Cette équation différentielle admet les solutions suivantes :

- **amortissement fort** : $\lambda > \omega_0$: **pas d'oscillations** : mouvement **apériodique** : c'est un retour lent vers la position d'équilibre
- **amortissement moyen** : $\lambda = \omega_0$: c'est le **régime critique** c'est un retour rapide vers la position d'équilibre, mais l'énergie est insuffisante pour osciller
- **amortissement faible** : $\lambda < \omega_0$: c'est le **régime PSEUDO-PERIODIQUE** : il y a des oscillations avec diminution exponentielle de l'amplitude.

$$x = a_0 e^{-\lambda t} \cdot \cos(\omega t + \varphi)$$

3.3. Les mots importants dans cette question sont : AMPLITUDE, 10^{ième} oscillation, moitié, début
Ce qui se traduit de la manière suivante :

$$a = a_0 e^{-\lambda t} \quad \text{avec} \quad \begin{array}{ll} \text{pour } t = 0 & \Rightarrow a = a_0 \\ \text{pour } t = 10 T_0 & \Rightarrow a = \frac{a_0}{2} = a_0 e^{-\lambda \cdot 10 T_0} \end{array}$$

Donc $\frac{a_0}{2} = a_0 e^{-\lambda \cdot 10 \cdot T_0}$

En simplifiant par a_0 et en prenant le logarithme de chaque

membre on obtient : $\ln \frac{1}{2} = -\lambda \cdot 10 \cdot T_0 \Rightarrow -\ln 2 = -\lambda \cdot 10 \cdot T_0$

Donc $\lambda = \frac{\ln 2}{10 \cdot T_0} = \frac{\ln 2}{10 \cdot 0,77} \Rightarrow \lambda = 9 \cdot 10^{-2} \text{ rad.s}^{-1}$

3.4. Equation horaire $x = a_0 e^{-\lambda t} \cdot \cos(\omega t + \varphi)$

- a_0 : amplitude : $a = 4 \text{ cm} = 4 \cdot 10^{-2} \text{ m}$

- $\lambda = 0,09 \text{ rad.s}^{-1}$

- ω = pseudo-pulsation avec $\omega^2 = \omega_0^2 - \lambda^2 \Rightarrow \omega = \sqrt{\omega_0^2 - \lambda^2} = \sqrt{8,16^2 - (0,09)^2}$
 $\Rightarrow \omega = 8,15950 \Rightarrow \omega = \omega_0 = 8,16 \text{ rad.s}^{-1}$

- $\varphi = 0$ les conditions initiales sont celles vues dans le paragraphe 2.)

Conclusion : $x = 4 \cdot 10^{-2} \cdot e^{-0,09 \cdot t} \cdot \cos 8,16 t$

3.5. La situation décrite est la situation critique : $\lambda_c = \omega_0 = 8,16 \text{ rad.s}^{-1}$

EXERCICE 4 :

1. Equilibre

* système : masse

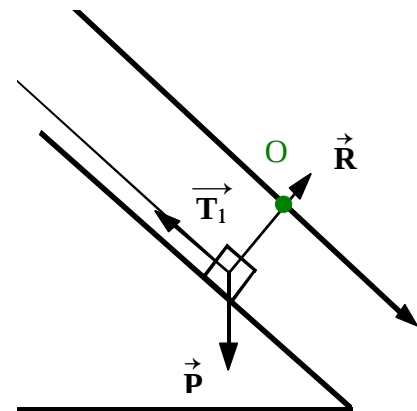
* Bilan : Poids $\vec{P}$: $P = m g$;

Réaction $\vec{R}$ du plan ;

Tension du ressort $\vec{T}_1$: $T_1 = k \Delta l$

* Equilibre : $\Sigma \vec{F} = \vec{0}$

donc $\vec{P} + \vec{R} + \vec{T}_1 = \vec{0}$



* Projection sur X'X : $m g \sin \alpha - k \Delta l = 0$ donc

$\sin \alpha = \frac{k \Delta l}{m g}$

ce qui donne $\sin \alpha = 0,5 \Rightarrow \alpha = 30^\circ$

2. Mouvement :

2.1. Equation différentielle :

* système : masse

* Bilan : Poids $\vec{P}$: $P = m g$;

Réaction $\vec{R}$ du plan ;

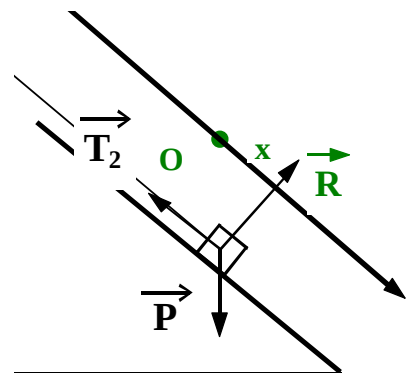
Tension du ressort $\vec{T}_2$: $T_2 = (k \Delta l + x)$

* P F D : $\Sigma \vec{F} = m \vec{\gamma}$ donc $\vec{P} + \vec{R} + \vec{T}_2 = m \vec{\gamma}$

* Projection sur X'X :

$m g - k (\Delta l + x) = m \ddot{x}$

ce qui donne $m g - k \Delta l - k x = m \ddot{x} \Rightarrow -k x = m \ddot{x}$



⇒ **Donc l'équation différentielle s'écrit : $\ddot{x} + \frac{k}{m}x = 0$:**

c'est une équation du type $\ddot{x} + \omega^2 x = 0$.

La solution est une fonction sinusoïdale du temps : $x = a \cos(\omega t + \varphi)$

2.2. Equation horaire : $x = a_0 \cos(\omega_0 t + \varphi)$

- a_0 : amplitude $a = 3 \text{ cm} = 3 \cdot 10^{-2} \text{ m}$
- $\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}} = \sqrt{\frac{12}{0,12}} = 10 \text{ rad.s}^{-1}$
- $\varphi = ?$ Ce sont les conditions initiales (au départ) qui vont fixer la valeur de φ .
 $t = 0 \Rightarrow x = a_0 \cos \varphi$
 $\Rightarrow x = + a_0$ donc $\cos \varphi = +1 \Rightarrow \varphi = 0$

L'équation horaire devient alors : **$x = 3 \cdot 10^{-2} \cos 10 t$**

2.3. Période : $T_0 = \frac{2\pi}{\omega_0}$ avec $\omega_0^2 = \frac{k}{m} \Rightarrow \omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$

Donc **$T_0 = 2\pi \sqrt{\frac{m}{k}}$** **$T = 0,628 \text{ s}$**

3. MOUVEMENT AMORTI PAR FROTTEMENT VISQUEUX

3.1. Equation différentielle du mouvement : c'est la même étude qu'au paragraphe 2.) Il faut simplement rajouter au bilan des forces la force de frottement $\vec{F} = -b \cdot \vec{v}$

Ce qui donne pour la projection sur X'X : $-kx - b\dot{x} = m\ddot{x}$

En divisant par $m \Rightarrow \ddot{x} + \frac{b}{m}\dot{x} + \frac{k}{m}x = 0$

Ce qui est une équation du type : $\ddot{x} + 2\lambda\dot{x} + \omega_0^2 x = 0$

Avec $2\lambda = \frac{b}{m}$ et $\omega_0^2 = \frac{k}{m} \Rightarrow \omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$

3.2. Pour résoudre cette équation différentielle on calcule les racines de l'équation caractéristique : $r^2 + 2\lambda r + \omega_0^2 = 0$

discriminant réduit : $\Delta' = \lambda^2 - \omega_0^2$

Le mouvement apériodique (sans oscillation) CRITIQUE (à la limite de l'oscillation) coorespond aus cas $\Delta' = 0 \Rightarrow \lambda_c = \omega_0$

Comme $\lambda = \frac{b}{2m} \Rightarrow \omega_0 = \frac{b}{2m} \Rightarrow \mathbf{b = 2m \cdot \omega_0}$
 $\Rightarrow \mathbf{b = 2,4 \text{ kg.s}^{-1}}$

3.3. On change le milieu : donc $b_1 = \frac{b}{15}$, on se trouve dans les conditions $\lambda_1 < \omega_0$

Le système peut osciller : c'est le régime PSEUDO-PERIODIQUE

Pseudo-pulsation : $\omega^2 = \omega_0^2 - \lambda_1^2 \Rightarrow \omega = \sqrt{\omega_0^2 - \left(\frac{\omega_0}{15}\right)^2}$
 $\omega = 9,98 \text{ rad.s}^{-1}$

Coefficient d'amortissement : $\lambda_1 = \frac{\omega_0}{15} = \frac{10}{15} = 0,67 \text{ rad.s}^{-1}$

L'équation horaire peut s'écrire :
 $x = a_0 e^{-\lambda_1 \cdot t} \cdot \cos(\omega t + \varphi)$
 $x = 3 \cdot 10^{-2} e^{-0,67 \cdot t} \cdot \cos(9,98 t)$

3.4. On raisonne sur l'amplitude : $a = a_0 e^{-\lambda_1 \cdot t}$

Pour $t = 0$ $a = a_0$

Pour $t = t_f$ $a = a_0 \exp(-\lambda_1 \cdot t_f) = \frac{a_0}{100}$

En simplifiant par a_0 et en prenant le logarithme de chaque membre on obtient : $\ln \frac{1}{100} = -\lambda_1 \cdot t_f$

Donc $t_f = \frac{\ln 100}{\lambda_1} = \frac{\ln 100}{0,67} \Rightarrow t_f = 6,9 \text{ s}$